Les suites numériques

1 La suite majorée, minorée et bornée

Définition :

⋆ On dit qu'une suite $(U_n)_{n\geqslant n_0}$ est majorée s'il existe un réel M tel que $(\forall n \geqslant n_0) : U_n \leqslant M$.
⋆ On dit qu'une suite $(U_n)_{n\geqslant n_0}$ est minorée s'il existe un réel m tel que $(\forall n \geqslant n_0) : U_n \geqslant m$.
⋆ On dit qu'une suite $(U_n)_{n\geqslant n_0}$ est bornée s'il existe un réel positif C tel que $(\forall n \geqslant n_0) : |U_n| \leqslant C$.
(ie. la suite est majorée et minorée à la fois)

Remarques :

⋆ Toute suite positive est minorée par 0.
⋆ Toute suite négative est majorée par 0.

2 La suite monotone

Définition :

On dit qu'une suite est monotone s'elle est croissante ou décroissante.

Proposition :

⋆ $(U_n)_{n\geqslant n_0}$ est croissante $\Leftrightarrow$ $(\forall n \geqslant n_0) : U_{n+1} \geqslant U_n$ $\Leftrightarrow$ $(\forall n \geqslant n_0) : U_{n+1} - U_n \geqslant 0$.
⋆ $(U_n)_{n\geqslant n_0}$ est strictement croissante $\Leftrightarrow$ $(\forall n \geqslant n_0) : U_{n+1} > U_n$ $\Leftrightarrow$ $(\forall n \geqslant n_0) : U_{n+1} - U_n > 0$.
⋆ $(U_n)_{n\geqslant n_0}$ est décroissante $\Leftrightarrow$ $(\forall n \geqslant n_0) : U_{n+1} \leqslant U_n$ $\Leftrightarrow$ $(\forall n \geqslant n_0) : U_{n+1} - U_n \leqslant 0$.
⋆ $(U_n)_{n\geqslant n_0}$ est strictement décroissante $\Leftrightarrow$ $(\forall n \geqslant n_0) : U_{n+1} < U_n$ $\Leftrightarrow$ $(\forall n \geqslant n_0) : U_{n+1} - U_n < 0$.
⋆ $(U_n)_{n\geqslant n_0}$ est constante $\Leftrightarrow$ $(\forall n \geqslant n_0) : U_{n+1} = U_n$.

Remarques :

⋆ Une suite croissante est minorée par son premier terme.(ie. $(\forall n \geqslant n_0) : U_n \geqslant U_{n_0}$)
⋆ Une suite décroissante est majorée par son premier terme.(ie. $(\forall n \geqslant n_0) : U_n \leqslant U_{n_0}$)

3 La suite arithmétique - la suite géométrique

	une suite arithmétique	une suite géométrique
définition	$(\forall n \geqslant n_0) : U_{n+1} = U_n + r$	$(\forall n \geqslant n_0) : U_{n+1} = qU_n$
terme général	$(\forall n \geqslant n_0) : U_n = U_p + (n-p)r$	$(\forall n \geqslant n_0) : U_n = U_p \times q^{n-p}$
la somme $S_n = U_p + ... + U_n$	$S_n = \left(\dfrac{n-p+1}{2}\right)(U_p + U_n)$	$S_n = \left(\dfrac{1-q^{n-p+1}}{1-q}\right) \times U_p \; ; (q \neq 1)$

Exemple :

⋆ $1 + 2 + 3 + ... + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

⋆ $2^0 + 2^1 + 2^2 + ... + 2^n = 2^{n+1} - 1$

4 Limite d'une suite

Définition :

⋆ On dit qu'une suite $(U_n)_{n\geqslant n_0}$ est convergente s'elle admet une limite finie l qd $n \longrightarrow +\infty$ et on écrit $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = l$

⋆ On dit qu'une suite $(U_n)_{n\geqslant n_0}$ est divergente s'elle n'est pas convergente.

Proposition :

Soit $r \in \mathbb{Q}^*$, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} n^r = \begin{cases} +\infty & si\ r > 0 \\ 0 & si\ r < 0 \end{cases}$$

Critères de convergence :

⋆ Toute suite croissante et majorée est convergente.

⋆ Toute suite décroissante et minorée est convergente.

⋆ $\begin{cases} (\forall n \geqslant n_0) : |U_n - l| \leqslant V_n \\ \lim\limits_{n\to+\infty} V_n = 0 \end{cases} \Longrightarrow (U_n)_{n\geqslant n_0}\ est\ convergente\ et\ \lim\limits_{n\to+\infty} U_n = l$

⋆ $\begin{cases} (\forall n \geqslant n_0) : W_n \leqslant U_n \leqslant V_n \\ \lim\limits_{n\to+\infty} V_n = \lim\limits_{n\to+\infty} W_n = l \end{cases} \Longrightarrow (U_n)_{n\geqslant n_0}\ est\ convergente\ et\ \lim\limits_{n\to+\infty} U_n = l$

⋆ $\begin{cases} (\forall n \geqslant n_0) : U_n \leqslant V_n \\ \lim\limits_{n\to+\infty} V_n = -\infty \end{cases} \Longrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} U_n = -\infty\ et\ (U_n)_{n\geqslant n_0}\ est\ divergente$

⋆ $\begin{cases} (\forall n \geqslant n_0) : W_n \leqslant U_n \\ \lim\limits_{n\to+\infty} W_n = +\infty \end{cases} \Longrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} U_n = +\infty\ et\ (U_n)_{n\geqslant n_0}\ est\ divergente$

Ordre et convergence :

⋆ $\begin{cases} (\exists k \in \mathbb{N})(\forall n \geqslant k) :\ U_n \geqslant 0 \\ \lim\limits_{n\to+\infty} U_n = l \end{cases} \Longrightarrow l \geqslant 0$

⋆ $\begin{cases} (\forall n \geqslant n_0) : U_n \leqslant V_n \\ \lim\limits_{n\to+\infty} U_n = l\ et\ \lim\limits_{n\to+\infty} V_n = l' \end{cases} \Longrightarrow l \leqslant l'$

Suites de type $f(U_n) = U_{n+1}$:

$$\begin{cases} f\ est\ continue\ sur\ un\ intervale\ fermé\ I \\ f(I) \subset I \\ U_{n_0} \in I \\ (U_n)_{n\geqslant n_0}\ est\ convergente \\ \lim\limits_{n\to+\infty} U_n = l \end{cases} \Longrightarrow l\ est\ une\ solution\ de\ l'équation\ f(x) = x\ sur\ I$$

Les suites adjascentes :

Définition :

On dit $(U_n)_{n\geqslant p}$ et $(V_n)_{n\geqslant q}$ sont deux suites adjacentes si :

⋆ $(U_n)_{n\geqslant p}$ est croissante et $(V_n)_{n\geqslant q}$ est décroissante. ⋆ $\lim\limits_{n\to+\infty} (U_n - V_n) = 0$

Proposition :

$(U_n)_{n\geqslant p}$ et $(V_n)_{n\geqslant q}$ sont deux suites adjacentes $\Longrightarrow$ elles sont convergentes et ont la même limite.